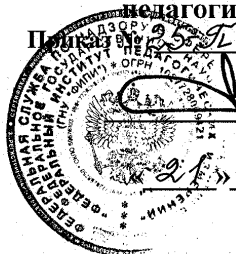


«УТВЕРЖДАЮ»

Директор  
Федерального института  
педагогических измерений

Приказ № 25-П от «21» июля 2009 г.



А.Г. Ершов

«21» июля 2009 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

**Демонстрационный вариант**

контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2010 года

**Пояснения к демонстрационному варианту  
контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2010 года  
по МАТЕМАТИКЕ**

Демонстрационный вариант ЕГЭ по математике 2010 года разработан по заданию Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалах, количестве заданий, их форме, уровне сложности. Задания Демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольно-измерительные материалы в 2010 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов – в кодификаторах требований и элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2010 г.

Правильное решение каждого из заданий В1-В12 части 1 экзаменационной работы оценивается 1 баллом. Полное правильное решение каждого из заданий С1 и С2 оценивается 2 баллами, С3 и С4 – 3 баллами С5 и С6 – 4 баллами. Максимальный балл за выполнение всей работы – 30.

Предполагается, что верное выполнение не менее пяти заданий экзаменационной работы отвечает минимальному уровню подготовки, подтверждающему освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования. Конкретное значение минимального тестового балла, подтверждающего освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования, определяется Федеральной службой по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации в установленном порядке.

К каждому заданию с развернутым ответом, включенному в демонстрационный вариант, дается одно-два возможных решения. Приведенные критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов и система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике.

## **Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ**

### **Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов 2010 года**

#### **Инструкция по выполнению работы**

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин.). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (В1–В12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

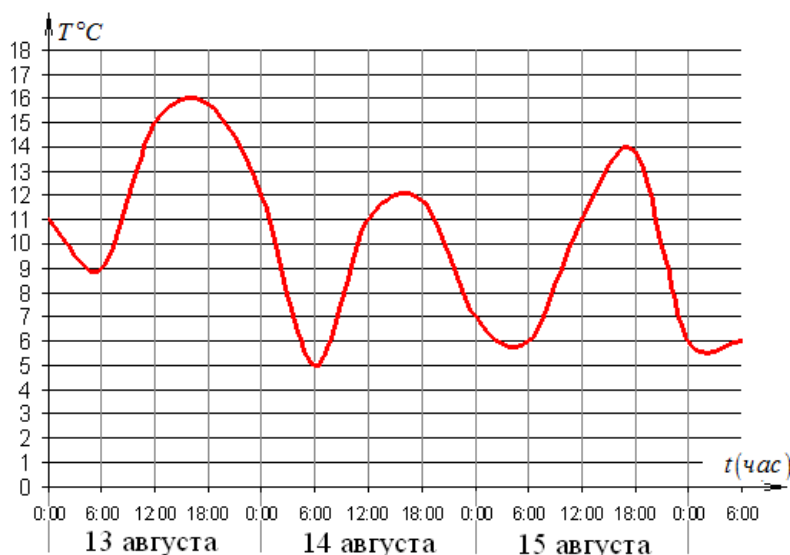
**Желаем успеха!**

## Часть 1

Ответом на задания В1-В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

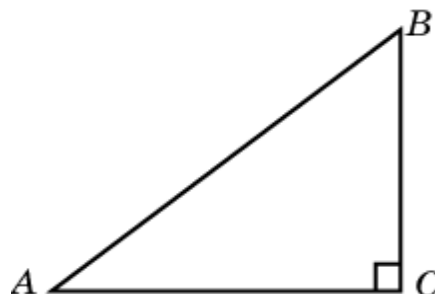
- В1** Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

- В2** На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат – значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа.



- В3** Найдите корень уравнения  $3^{x-2} = 27$ .

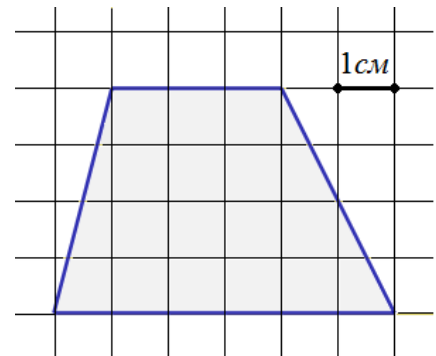
- В4** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $\cos A = 0,8$ . Найдите  $BC$ .



- B5** Строительная фирма планирует купить  $70 \text{ м}^3$  пеноблоков у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

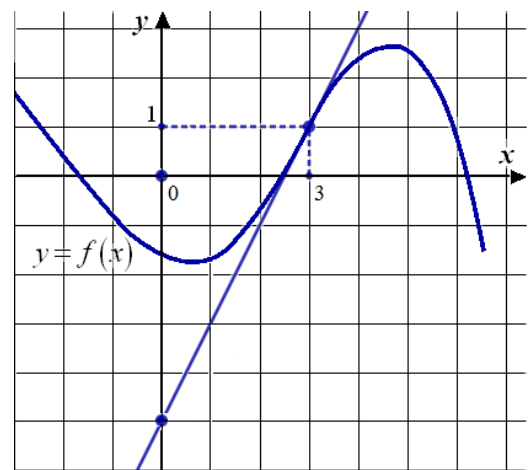
| Поставщик | Стоимость пеноблоков (руб. за $1 \text{ м}^3$ ) | Стоимость доставки (руб.) | Дополнительные условия доставки                                     |
|-----------|---|---------------------------|---|
| 1         | 2600  | 10000                     |   |
| 2         | 2800  | 8000                      | При заказе товара на сумму свыше 150000 рублей доставка бесплатная. |
| 3         | 2700  | 8000                      | При заказе товара на сумму свыше 200000 рублей доставка бесплатная. |

- B6** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$  (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



- B7** Найдите значение выражения  $\log_2 200 + \log_2 \frac{1}{25}$ .

- B8** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке  $x = 3$ .



**B9** Объем первого цилиндра равен  $12 \text{ м}^3$ . У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания – в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

**B10** Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой  $h(t) = -5t^2 + 18t$  ( $h$  – высота в метрах,  $t$  – время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

**B11** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 \cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

**B12** Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за три дня?

## Часть 2

*Для записи решений и ответов на задания C1-C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2} \sin y = x. \end{cases}$$

**C2** Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равна 2, а диагональ боковой грани равна  $\sqrt{5}$ . Найдите угол между плоскостью  $A_1BC$  и плоскостью основания призмы.

**C3** Решите неравенство  $\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x - 3)^2 \geq 2$ .

**C4** На стороне  $BA$  угла  $ABC$ , равного  $30^\circ$ , взята такая точка  $D$ , что  $AD = 2$  и  $BD = 1$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $D$  и касающейся прямой  $BC$ .

**C5**

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

**C6**

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1)  $a$  и  $b$ , что если к десятичной записи числа  $a$  приписать справа через запятую десятичную записи числа  $b$ , то получится десятичная запись числа, равного  $\frac{b}{a}$ .

**Система оценивания демонстрационного варианта  
контрольных измерительных материалов по МАТЕМАТИКЕ**

**Ответы к заданиям части 1**

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

| <b>№ задания</b> | <b>Ответ</b> |
|------------------|--------------|
| B1               | 5            |
| B2               | 14           |
| B3               | 5            |
| B4               | 3            |
| B5               | 192000       |
| B6               | 18           |
| B7               | 3            |
| B8               | 2            |
| B9               | 9            |
| B10              | 2,4          |
| B11              | 1            |
| B12              | 20           |

**Ответы к заданиям части 2**

| <b>№ задания</b> | <b>Ответ</b>  |
|------------------|---|
| C1               | $x = 2, y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$ |
| C2               | $30^\circ$  |
| C3               | -1  |
| C4               | 1 или 7   |
| C5               | $-8 \leq a \leq 6$                                  |
| C6               | $a = 2, b = 5$                                      |



## Решения и критерии оценивания заданий части 2

Оценки заданий части 2 зависят от полноты решения и правильности ответа.

**Общие требования к выполнению заданий с развернутым ответом:** решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов.

Эксперты проверяют математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов. Однако они не исчерпывают всех возможных ситуаций.

Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

При выполнении задания экзаменуемый может использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2} \sin y = x. \end{cases}$$

**Решение.**

1. Сделаем замену  $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = t$ . Тогда  $x^2 + 3x = t^2 + 1$ . Теперь первое уравнение системы можно привести к виду:  $t^2 - t - 6 = 0$ .

Корни:  $t = -2$  или  $t = 3$ .

Получаем:  $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = -2$  или  $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = 3$ .

Первое из этих уравнений не имеет корней. Решим второе:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 &= 0; \\ x &= -5 \text{ или } x = 2. \end{aligned}$$

2. При каждом из найденных значений  $x$  решим второе уравнение системы.

а) Если  $x = -5$ , то  $\sin y = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$ .

Поскольку  $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ ,  $\sqrt{8} < 5$ , получаем, что  $\frac{5}{2\sqrt{2}} > 1$ . Значит, уравнение  $\sin y = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$  не имеет решений, поскольку его правая часть меньше  $-1$ .

б) Если  $x = 2$ , то  $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Ответ:**  $x = 2, y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Возможны другие формы записи ответа.** Например:

А)  $x = 2, y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$  или  $y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

Б)  $\begin{cases} x = 2, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$

В)  $\left(2; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), \left(2; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$ .

| Баллы | Критерии оценивания выполнения задания С1                  |
|-------|--|
| 2     | В представленном решении обоснованно получен верный ответ. |
| 1     | Верно решено первое уравнение, но система решена неверно.  |
| 0     | Решение неверно или отсутствует.                           |
| 2     | Максимальный балл  |

**С2** Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равна 2, а диагональ боковой грани равна  $\sqrt{5}$ . Найдите угол между плоскостью  $A_1BC$  и плоскостью основания призмы.

**Решение.** Обозначим  $H$  середину ребра  $BC$  (см. рисунок). Так как треугольник  $ABC$  равносторонний, а треугольник  $A_1BC$  – равнобедренный, отрезки  $AH$  и  $A_1H$  перпендикулярны  $BC$ . Следовательно,  $\angle A_1HA$  – линейный угол двугранного угла с гранями  $BCA$  и  $BCA_1$ .

Из треугольника  $A_1AB$  найдем:  $AA_1=1$ .

Из треугольника  $A_1HB$  найдем:  $AH = \sqrt{3}$ .

Из треугольника  $HAA_1$  найдем:

$$\operatorname{tg} \angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Искомый угол равен  $30^\circ$ .

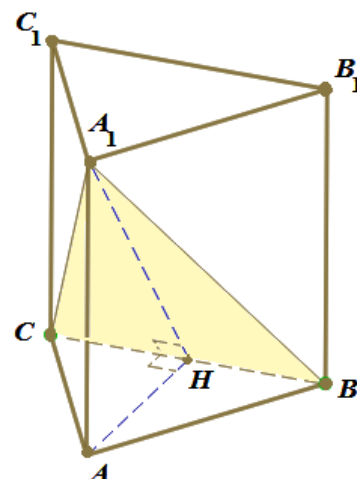
**Ответ:**  $30^\circ$ .

**Возможны другие формы записи ответа.** Например,

А)  $\frac{\pi}{6}$ ;

Б)  $\frac{\pi}{6}$  рад.

В)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$  и т.п.



**Возможны другие решения.** Например, решение задачи с использованием векторов или метода координат.

| Баллы | Критерии оценивания выполнения задания С2  |
|-------|--|
| 2     | Получен и обоснован верный ответ.  |
| 1     | Построен или описан линейный угол искомого угла или угол между перпендикулярами к плоскостям $A_1BC$ и $ABC$ , но получен неверный ответ или решение не закончено. |
| 0     | Решение неверно или отсутствует.   |
| 2     | <i>Максимальный балл</i>   |

**С3**

Решите неравенство  $\log_{x+3}(9-x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x-3)^2 \geq 2$ .

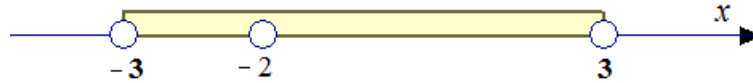
**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$\log_{x+3}((3-x)(3+x)) - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2|x-3| \geq 2.$$

Найдем, при каких значениях  $x$  левая часть неравенства имеет смысл:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ x + 3 \neq 1, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (3 - x)(3 + x) > 0, \\ x > -3, \\ x \neq -2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$



Получаем:  $-3 < x < -2$  или  $-2 < x < 3$ .

Значит,  $|x - 3| = 3 - x$  при всех допустимых значениях  $x$ . Поэтому

$$\log_{x+3}(3-x) + \log_{x+3}(3+x) - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2(3-x) \geq 2;$$

$$\log_{x+3}(3-x) + 1 - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2(3-x) \geq 2.$$

Сделаем замену  $\log_{x+3}(3-x) = y$ . Получаем:

$$y - \frac{1}{4} y^2 \geq 1; \quad y^2 - 4y + 4 \leq 0; \quad (y - 2)^2 \leq 0; \quad y = 2.$$

Таким образом,  $\log_{x+3}(3-x) = 2$ , откуда  $(x+3)^2 = 3-x$ ;  $x^2 + 7x + 6 = 0$ .

Корни уравнения:  $-6$  и  $-1$ . Условию  $-3 < x < -2$  или  $-2 < x < 3$  удовлетворяет только  $x = -1$ .

**Ответ:**  $-1$ .

**Замечание.** Можно не находить область допустимых значений  $x$ , а прийти к соотношению  $|x - 3| = 3 - x$  другим способом. Тогда решение будет немного короче.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{x+3}((3-x)(3+x)) - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2|x-3| \geq 2.$$

Заметим, что  $x + 3 > 0$  и  $(3 - x)(3 + x) > 0$ . Значит,  $3 - x > 0$ .

Поэтому  $|x - 3| = 3 - x$ . Получаем:

$$\log_{x+3}(3-x) + 1 - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2(3-x) \geq 2.$$

Сделаем замену  $\log_{x+3}(3-x) = y$ . Получаем:

$$y - \frac{1}{4} y^2 \geq 1; \quad y^2 - 4y + 4 \leq 0; \quad (y - 2)^2 \leq 0; \quad y = 2.$$

Таким образом,

$$\log_{x+3}(3-x) = 2; \quad \begin{cases} (x+3)^2 = (3-x), \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 7x + 6 = 0, \\ x > -3, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ x = -6, \\ x > -3, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad x = -1.$$

**Ответ:**  $-1$ .

| Баллы | Критерии оценивания выполнения задания С3   |
|-------|---|
| 3     | В представленном решении обоснованно получен верный ответ.  |
| 2     | При верном решении допущена вычислительная ошибка, не влияющая на правильную последовательность рассуждений, и, возможно, приведшая к неверному ответу. |
| 1     | Получен ответ, содержащий наряду с правильным постороннее решение.  |
| 0     | Решение не закончено или получен неверный ответ (кроме тех случаев, в которых выставляется 1–2 балла; см. выше).  |
| 3     | <i>Максимальный балл</i>  |

**С4** На стороне  $BA$  угла  $ABC$ , равного  $30^\circ$ , взята такая точка  $D$ , что  $AD = 2$  и  $BD = 1$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $D$  и касающейся прямой  $BC$ .

**Решение.** Центр  $O$  искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку  $AD$ . Обозначим  $P$  середину отрезка  $AD$ ,  $Q$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на прямую  $BC$ ,  $E$  – точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой  $BC$  (см. рисунок а). Из условия касания окружности и прямой  $BC$  следует, что отрезки  $OA$ ,  $OD$  и  $OQ$  равны радиусу  $R$  окружности.

Заметим, что точка  $O$  не может лежать по ту же сторону от прямой  $AB$ , что и точка  $E$ , так как в этом случае расстояние от точки  $O$  до прямой  $BC$  меньше, чем расстояние от нее до точки  $A$ .

Из прямоугольного треугольника  $BPE$  с катетом  $BP = 2$  и  $\angle B = 30^\circ$  находим, что  $PE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Так как  $OA = R$  и  $AP = 1$ , получаем:

$$OP = \sqrt{R^2 - 1} \text{ и, следовательно, } OE = \sqrt{R^2 - 1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

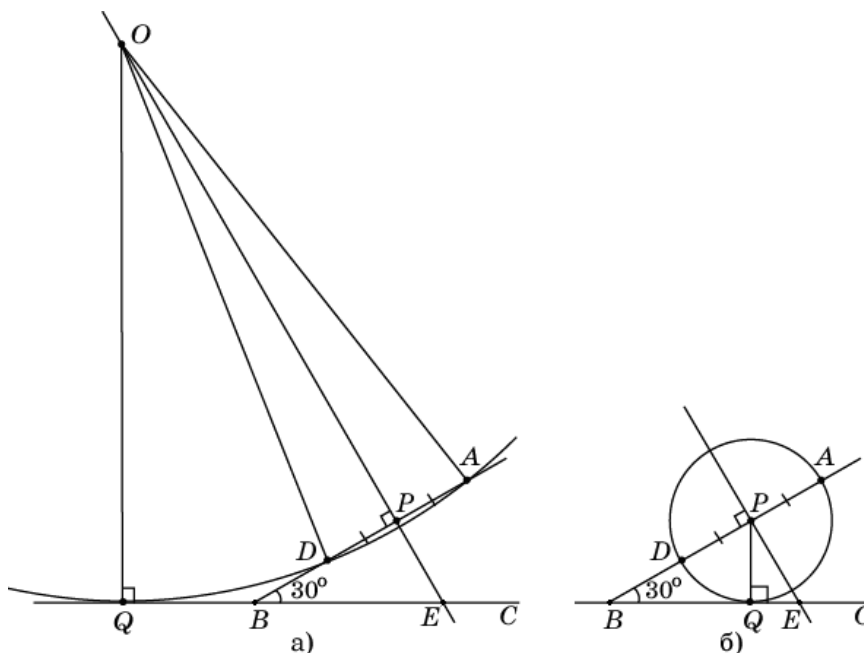
Из прямоугольного треугольника  $OQE$ , в котором  $\angle E = 60^\circ$ , находим:

$$R = OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} OE = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{R^2 - 1} + 1.$$

В результате получаем уравнение для  $R$ :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2 - 1} = R - 1.$$

Возведем в квадрат обе части этого уравнения и приведем подобные члены. Получим уравнение  $R^2 - 8R + 7 = 0$ , решая которое находим два корня  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 7$ . Если радиус равен 1, то центром окружности является точка  $P$  (см. рисунок б).



**Ответ:** 1 или 7.

**Другое решение.** Пусть точка  $Q$  касания окружности с прямой  $BC$  лежит на луче  $BC$  (см. рисунок а). По теореме о касательной и секущей

$$BQ^2 = BA \cdot BD = (BD + DA) \cdot BD = (1 + 2) \cdot 1 = 3,$$

откуда  $BQ = \sqrt{3}$ .

Пусть  $O$  – точка пересечения луча  $BA$  и перпендикуляра к  $BC$ , проведенного через точку  $Q$ . Из прямоугольного треугольника  $BQO$  находим:

$$BO = \frac{BQ}{\cos 30^\circ} = 2, \text{ тогда } AO = OD = 1 \text{ и } OQ = \frac{1}{2}BO = 1.$$

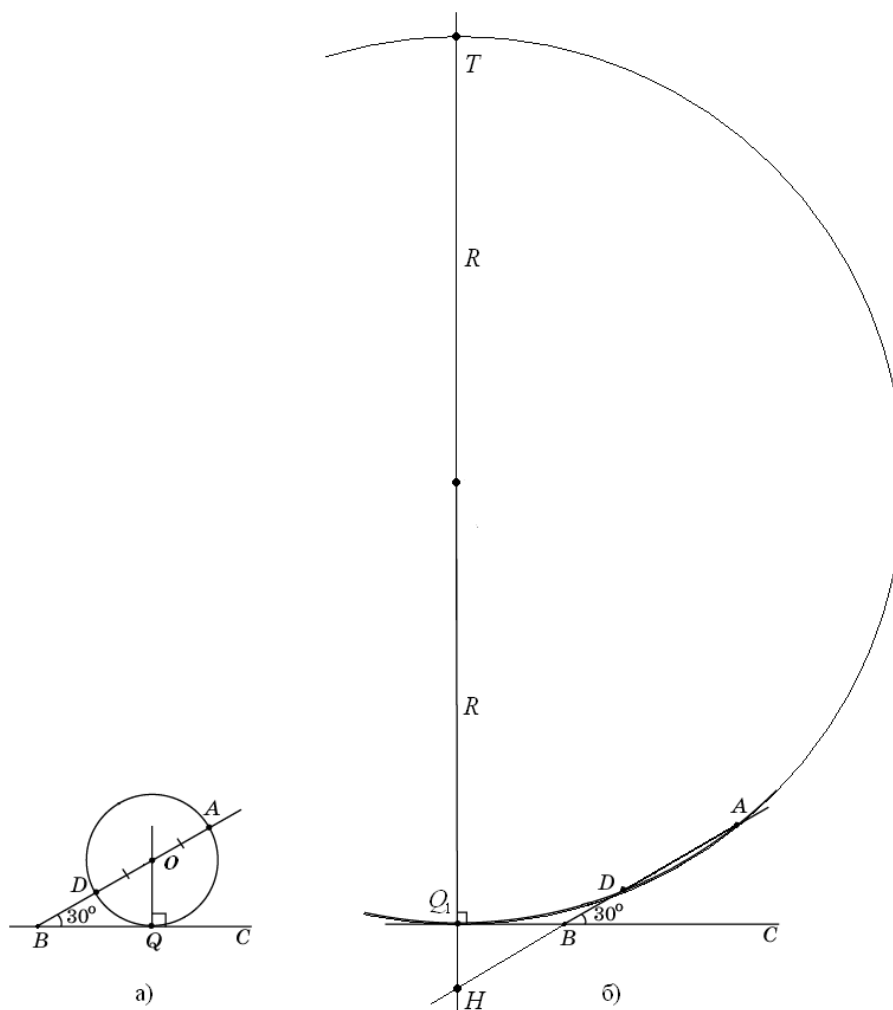
Таким образом, точка  $O$  удалена от точек  $A$ ,  $D$  и  $Q$  на одно и то же расстояние, равное 1. Следовательно,  $O$  – центр искомой окружности, а ее радиус равен 1.

Пусть теперь точка  $Q_1$  касания окружности с прямой  $BC$  лежит на продолжении  $BC$  за точку  $B$  (см. рисунок б), а прямая, проходящая через точку  $Q_1$  перпендикулярно  $BC$ , пересекает прямую  $AB$  в точке  $H$ , а окружность вторично – в точке  $T$ . Тогда

$$BQ_1 = \sqrt{BA \cdot BD} = \sqrt{3}, \quad \angle HBQ_1 = \angle ABC = 30^\circ,$$

$$BH = \frac{BQ_1}{\cos 30^\circ} = 2, \quad HQ_1 = \frac{1}{2} BH = 1.$$

Если  $R$  – радиус окружности, то  $Q_1T = 2R$ . По теореме о двух секущих  $HQ_1 \cdot HT = HA \cdot HD$ , то есть  $1 \cdot (1 + 2R) = (2 + 3) \cdot 3$ , откуда находим, что  $R = 7$ .



**Ответ:** 1 или 7.

**Возможны другие формы записи ответа.** Например,

А) 1, 7;

Б) радиус окружности равен 7 или 1.

| Баллы | Критерии оценивания выполнения задания С4   |
|-------|---|
| 3     | В представленном решении верно найдены оба возможных значения радиуса.              |
| 2     | Рассмотрены оба случая расположения окружности, но верно найден только один радиус. |
| 1     | Рассмотрен только один случай расположения окружности и верно найден ее радиус.     |
| 0     | Оба радиуса найдены неверно или не найдены.   |
| 3     | Максимальный балл   |

**С5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

**Решение.**

Запишем уравнение в виде  $9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a|| = 0$ . Функция  $f(x) = 9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a||$  непрерывна и

1) неограниченно возрастает при  $x \geq 1$ , так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = 9x - 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где  $k \geq 9 - 4 - 4 = 1 > 0$ ;

2) убывает при  $x \leq 1$ , так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = -9x + 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где  $k \leq -9 - 4 + 4 = -9 < 0$ .

Следовательно, наименьшее значение функция  $f$  принимает при  $x = 1$ , и уравнение  $f(x) = 0$  будет иметь корень тогда и только тогда, когда  $f(1) \leq 0$ .

Решим это неравенство:

$$\begin{aligned} |3 - |1 + a|| &\leq 4; \\ -4 &\leq |a + 1| - 3 \leq 4; \\ |a + 1| &\leq 7; \\ -7 &\leq a + 1 \leq 7; \\ -8 &\leq a \leq 6. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $-8 \leq a \leq 6$ .

**Возможны другие формы записи ответа.** Например:

А)  $[-8; 6]$ ;

Б)  $a \in [-8; 6]$ .



| Баллы | Критерии оценивания выполнения задания С5   |
|-------|---|
| 4     | В представленном решении обоснованно получен верный ответ.  |
| 3     | Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован: например, не указано явно необходимое и достаточное условие существования корня, или то, что функция принимает все значения из промежутка $[f(1); +\infty)$ , или решение содержит вычислительную ошибку. |
| 2     | Верно рассмотрены отдельные случаи раскрытия модуля, в результате чего получена часть верного ответа (возможно, другие случаи не рассмотрены или при их рассмотрении допущены ошибки).  |
| 1     | Верно рассмотрены отдельные случаи раскрытия модуля, но не найдена никакая часть верного ответа.  |
| 0     | Решение не содержит ни одного верно рассмотренного случая раскрытия модуля.   |
| 4     | Максимальный балл   |

С6

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1)  $a$  и  $b$ , что если к десятичной записи числа  $a$  приписать справа через запятую десятичную запись числа  $b$ , то получится десятичная запись числа, равного  $\frac{b}{a}$ .

**Решение.** Пусть десятичная запись числа  $b$  состоит из  $n$  цифр. Тогда по условию задачи можно записать равенство

$$\frac{b}{a} = a + \frac{b}{10^n}, \text{ поэтому } 10^n(b - a^2) = ab. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что  $b > a^2 \geq a$ . Так как числа  $a$  и  $b$  взаимно простые, числа  $b - a^2$  и  $ab$  тоже взаимно простые. (Действительно, пусть  $p$  – общий простой делитель этих чисел. Тогда если  $p$  делитель  $a$ , то  $p$  будет делителем  $b$ . Если же  $p$  – делитель  $b$ , то  $p$  будет делителем  $a^2$ , значит,  $p$  – делитель  $a$ . Противоречие.)

Поэтому  $b - a^2 = 1$  и, следовательно,  $ab = 10^n$ . Последнее равенство при взаимно простых  $a$  и  $b$  возможно только в двух случаях:

1)  $b = 10^n$ ,  $a = 1$ , но в этом случае не выполняется равенство  $b - a^2 = 1$ .

2)  $b = 5^n$ ,  $a = 2^n$ . В этом случае равенство  $b - a^2 = 1$  принимает вид

$$5^n - 4^n = 1, \text{ откуда } \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Функция  $f(n) = \left(\frac{5}{4}\right)^n$  возрастает, а функция  $g(n) = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$  убывает. Поэтому уравнение  $f(n) = g(n)$  имеет не более одного корня, и так как  $f(1) = g(1)$ , единственным корнем уравнения является  $n = 1$ .

Ответ:  $a = 2, b = 5$ .

Возможны другие формы записи ответа. Например:

А)  $(2; 5)$ ;

Б)  $\frac{5}{2} = 2,5$ ;

В)  $\begin{cases} a = 2, \\ b = 5. \end{cases}$

| Баллы | Критерии оценивания выполнения задания С6   |
|-------|---|
| 4     | В представленном решении обоснованно получен верный ответ.  |
| 3     | Получена система необходимых и достаточных условий на пару искомым чисел и найдено ее решение, но недостаточно обоснована его единственность.   |
| 2     | Составлено верное уравнение в натуральных числах, из которого сделаны какие-либо существенные выводы для нахождения искомой пары чисел, уравнение до конца не решено, но верный ответ приведен. |
| 1     | Составлено, но не решено верное уравнение в натуральных числах, верный ответ приведен.  |
| 0     | Ответ не найден, или ответ неверен, или в решении отсутствует верное уравнение в натуральных числах.  |
| 4     | <i>Максимальный балл</i>  |